数理解析研究所講究録
459巻 1982年 29-57



# A型 Gauss-Manin 方程式系

慶応大 理工　石浦信三
上智大 理工　野海正俊

$F(x,t) = x^{\ell} + t_2 x^{\ell-2} + \cdots + t_\ell$ $(t=(t_2,\dots,t_\ell))$ を $A_{\ell-1}$ 型孤立特異点をもつ多項式 $x^{\ell}$ の versal な変形とし，$\delta$ 函数の積分 $u = \int \delta(F)dx$ の満たす micro 微分方程式系 — $A_{\ell-1}$ 型 Gauss-Manin 方程式系を考察する。我々は，K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] により導入された flat coordinate system を用いて，その explicit な表示を与える。第1節で，Gauss-Manin 系の構造論を準備したのち，第2節では，A型 flat coordinate system の背後にある分数ゆの構造を独立に定式化する。第3節で，前2節の結果を総合して，A型 Gauss-Manin 系の幾つかの表示を与えることにする。ここでは述べられなかったが，第2節の結果を適用して，A型 Gauss-Manin 系の"母函数表示"を構成することができる。これについては，S. Ishiura, M. Noumi [1] を参照されたい。

# 第1節　Gauss-Manin系の構造

□1.　普遍開折のGauss-Manin系．原点を孤立特異点とする正則函数の芽 $f: X_0=(\mathbb{C}^{n+1},0)\longrightarrow S_0=(\mathbb{C},0)$ の，基底 $T=(\mathbb{C}^{m-1},0)$ 上の開折(unfolding) $\varphi$ は，可換図式

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccc} X_0 & \hookrightarrow & X = X_0\times T & & \\ f\downarrow & & \downarrow\varphi & \overset{p}{\searrow} & T \\ S_0 & \hookrightarrow & S = S_0\times T & \underset{q}{\nearrow} & \end{array}\qquad p,q\text{ は標準射影}.$$

で，$f$ が $\varphi$ の埋め込み $S_0\hookrightarrow S$ による引き戻しになるものとして定義される。ここで，$X_0$ の座標を $x=(x_0,\ldots,x_n)$，$S_0$ の座標を $t_1$，$T$ の座標を $t'=(t_2,\ldots,t_m)$ として，埋め込み写像 $X_0\hookrightarrow X$，$S_0\hookrightarrow S$ は，$t'=0$ で定められるものとする。ファイバー積 $Z=X\times_S T$ を考えれば，図式

$$(1.2)\qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q'} & X \\ p'\downarrow & \swarrow\varphi & \downarrow p \\ S & \xrightarrow[q]{} & T \end{array}$$

を得る。$\varphi$ の $t_1$-成分を $F_1=F_1(x,t')$ と書くと，$F_1|_{t'=0}=f$ となり，$F_1$ は $f$ のパラメータ $t'$ についての変形と見做すことができる。

$$(1.3)\qquad F = t_1 - F_1$$

とおく。開折 $\varphi$（あるいは，変形 $F$）が普遍(versal)だと

いうのを、次の infinitesimally versal の条件で定義する：

$$(1.5)\quad \begin{cases} \text{偏導函数 } \partial_{t_k}(F)\big|_{t=0}\ (k=1,\dots,m) \text{ が剰余環} \\ \mathcal{O}_{X_0}/(\partial_{x_0}(f),\dots,\partial_{x_n}(f)) \text{ の } \mathbb{C}\text{-線型空間としての} \\ \text{基底をなす。}^{*)} \end{cases}$$

以下、普遍開折 $\varphi$ について議論をすすめる。X 上の $(n+1)$-相対微分形式の $\mathcal{O}_X$-加群 $\Omega^{n+1}_{X/T}$ について $\Omega_F = \Omega^{n+1}_{X/T}/dF_1\wedge\Omega^n_{X/T}$ とおく。$\Omega_F$ の台を、C と書いて、F の <u>critical subset</u> と呼ぶ。偏導函数 $\partial_{x_0}(F_1),\dots,\partial_{x_n}(F_1)$ の生成する $\mathcal{O}_X$ の ideal を $I_C$ とすれば、$\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_X/I_C$ で、C は X の部分多様体になっている。一方、S 上の正則ベクトル場のなす $\mathcal{O}_S$-加群 $\mathcal{D}er_S$ について、部分 Lie 環 $\mathfrak{g} = \{\theta\in\mathcal{D}er_S;\ [D_{t_1},\theta]=0\}$ を考える。条件 (1.5) は Weierstrass の準備定理を用いて、次の定理に言い換えられる。

**定理 1.** 写像 $\theta\in\mathfrak{g}\mapsto\theta(F)\in\mathcal{O}_X$ は、$\mathcal{O}_T$-同型写像

$$(1.6)\qquad \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_C\ (\xrightarrow{\sim}\Omega_F,\ \cdot\, dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n)$$

を誘導する。とくに、$\Omega_F, \mathcal{O}_C$ は、$\mathcal{O}_T$ 上階数 $m$ の自由加群である。

この定理の系として、$\varphi|_C : C\to S$ は、有限になり、C の $\varphi$ による像として、F の <u>discriminant</u> D が定まる。D は、S の被約かつ既約な超曲面である。

普遍開折 $\varphi: X\to S$ の Gauss-Manin 系を次の様に定める。

*) 以下、層の記号 $\mathcal{O}_X, \Omega^1_{X/T}$ 等で原点での stalk を表わす。

$\varphi|_C$ の有限性から，$\varphi$（resp. $p'$）は，$'T^*S = T^*S - T^*_S S$ 上，$T^*X$ 上の De Rham 系 $\mathcal{O}_X$（resp. $T^*Z$ 上の $F=0$ に台をもつ代数的 micro 函数の系 $\mathcal{C}_{[F]} = \mathcal{E}_Z\delta(F)$）に関して非特性的である。即ち，$\lambda = (0, dt_1) \in T^*S$ の近傍で，標準写像 $T^*X \xleftarrow{\rho} X\times_S {'T^*S} \xrightarrow{\varpi} {'T^*S}$（resp. $'T^*Z \xleftarrow{\rho'} Z\times_S {'T^*S} \xrightarrow{\varpi'} {'T^*S}$）について

$$(1.7)\qquad \varpi|_{\rho^{-1}(T^*_X X)} : \rho^{-1}(T^*_X X) \longrightarrow {'T^*S}$$
$$(\text{resp. } \varpi'|_{\rho'^{-1}(T^*_{\{F=0\}}Z)} : \rho'^{-1}(T^*_{\{F=0\}}Z) \longrightarrow {'T^*S})$$

が有限になる。そこで，micro 微分作用素環上の加群 category での直像

$$(1.8)\qquad H_F = \int_\varphi \mathcal{O}_X (= \varpi_*(\mathcal{E}_{S\leftarrow X} \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}{\otimes} \pi^{-1}(\mathcal{O}_X)))$$
$$= \int_{p'} \mathcal{C}_{[F]} = H^{n+1}(\varpi'_* \rho'^{-1} DR^{\cdot}_{Z/S}(\mathcal{C}_{[F]}))$$

が，$\lambda$ の近傍で定義できる。$H_F$ を開折 $\varphi$（または変形 $F$）の Gauss-Manin 系という。$H_F$ は，$\mathcal{E}_S$ 上 canonical な生成元 $u = \int \delta(F)dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n$（$\delta(F)dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n \in \Omega^{n+1}_{Z/S}\otimes\mathcal{C}_{[F]}$ のコホモロジー類）をもつ，simple holonomic system で，$H_F^{(k)} = \mathcal{E}_S(k)u$（$k\in\mathbb{Z}$）が，その good filtration になる。[*)]（詳しくは，F. Pham [2] を参照。）このとき，$\varphi$ の普遍性は，次のシンボルについての定理に言い換えられる。

*) 層の記号 $H_F$, $\mathcal{E}_S$ で $\lambda \in {'T^*S}$ での stalk を表わす。

<u>定理</u> 2. 写像 $\theta \in \mathcal{g} \longmapsto \theta D_{t_1}^{-1} u \in H_F^{(0)}$ は, $\mathcal{O}_T$-同型写像

(1.9) $\qquad \mathcal{g} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$

を誘導する。とくに, $H_F^{(0)}/H_F^{(-1)}$ は, $\mathcal{O}_T$上階数 $m$ の自由加群である。

定理 1, 2 をあわせて

(1.10)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{g} \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dr, "\wr"] & \\ H_F^{(0)}/H_F^{(-1)} \arrow[rr, "\sim"] & & \Omega_F \end{tikzcd}$$

という, 3つの $\mathcal{O}_T$-加群の同型が, 成立するのである。定理2の同型を, $H_F^{(0)}$ にもち上げることを考える。シンボル $H_F^{(0)}/H_F^{(-1)}$ が $\mathcal{O}_T$上, 階数 $m$ の自由加群ということから, micro 微分作用素の準備定理により, $H_F$ (resp. $H_F^{(0)}$) は, $\mathcal{E}_S$ の可換部分環 $\mathcal{O}_T \{\!\{ D_{t_1}^{-1} \}\!\} [D_{t_1}]$ (resp. $\mathcal{O}_T \{\!\{ D_{t_1}^{-1} \}\!\}$) の上に, 階数 $m$ の自由加群になることが従う。しかも定理 2により,

(1.11) $\qquad D_{t_k} D_{t_1}^{-1} u \qquad (k=1,\dots,m)$

は, その自由基底を与える。いま, $\mathcal{g} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} \mathcal{O}_T \{\!\{ D_{t_1}^{-1} \}\!\}$ の $\mathcal{O}_T \{\!\{ D_{t_1}^{-1} \}\!\}$-部分加群 $\tilde{\mathcal{g}} = \mathcal{g} D_{t_1}^{-1} \{\!\{ D_{t_1}^{-1} \}\!\}$ を考よう。$\tilde{\mathcal{g}}$ の元 $P$ は

(1.12) $\qquad P = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i D_{t_1}^{-i-1} \quad (\theta_i \in \mathcal{g})$

という表示をもつものである。

<u>定理</u> 3. 写像 $P \in \tilde{\mathcal{g}} \longmapsto Pu \in H_F^{(0)}$ は, $\mathcal{O}_T \{\!\{ D_t^{-1} \}\!\}$-左加群としての同型

(1.13) $\qquad \tilde{\mathcal{g}} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$

を与え，そのシンボルをとると同型（1.9）が得られる。

こうして得られた同型写像（1.13）が，普遍開折の Gauss-Manin 系の構造を，完全に記述する。

□2. Flatな座標系と，対数的ベクトル場．同型写像 $\tilde{g} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$ を通して，$g$ 上に幾つかの演算を導入する。自己準同型写像 $A_k \in End_{\mathcal{O}_T}(g)$，双線型写像 $B_k \in Hom_{\mathbb{C}}(g, g; g)$ $(k \in \mathbb{N})$ を次の様に定める。$\theta, \theta' \in g$ として，

$$(2.1) \quad \begin{cases} t_1 \theta D_{t_1}^{-1} u = \sum_{i=0}^{\infty} A_k(\theta) D_{t_1}^{-k-1} u \\ \theta \theta' D_{t_1}^{-2} u = \sum_{i=0}^{\infty} B_k(\theta, \theta') D_{t_1}^{-k-1} u \end{cases}$$

とおくのである。$A_0(\theta)$, $A_1(\theta)$ を他の $A_k$ $(k \geqq 2)$ と区別して，$t_1 * \theta$, $N(\theta)$ と書く。$\mathcal{D}er_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} g$ により，$\mathcal{D}er_S$ の $\mathcal{O}_S$-自己準同型写像

$$(2.2) \quad \begin{cases} t_1 * : \mathcal{D}er_S \longrightarrow \mathcal{D}er_S \\ N \ : \mathcal{D}er_S \longrightarrow \mathcal{D}er_S \end{cases}$$

に係数拡大する。同様に，$B_0(\theta, \theta')$, $B_1(\theta, \theta')$ を他の $B_k$ $(k \geqq 2)$ と区別して，$\theta * \theta'$, $\nabla_\theta(\theta')$ と書くことにする。$*$ について $g$ は $\mathcal{O}_T$-可換環になり，$\nabla : g \times g \to g$ については $a \in \mathcal{O}_T$, $\theta, \theta' \in g$ として，

$$(2.3) \quad \begin{cases} 0) \ \nabla_{a\theta}(\theta') = a \nabla_\theta(\theta') \\ 1) \ \nabla_\theta(a\theta') = \theta(a)\theta' + a \nabla_\theta(\theta') \\ 2) \ \nabla_\theta(\theta') - \nabla_{\theta'}(\theta) = [\theta, \theta'] \end{cases}$$

という性質が確かめられる。$\mathcal{D}er_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathfrak{g}$ により，係数拡大して，$*$ について $\mathcal{D}er_S$ は $\mathcal{O}_S$-可換環，$\nabla : \mathcal{D}er_S \times \mathcal{D}er_S \to \mathcal{D}er_S$ は，torsion free な <u>接続</u>（connection）になる。しかも，$D_{t_1}$ は，$\mathcal{D}er_S$ の単位元であり，$\nabla_\theta(D_{t_1}) = 0$ $(\theta \in \mathcal{D}er_S)$ が成り立つ。このとき，次の compatibility が成立する。

**命題 1.** $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}er_S)$ における関係式として

(2.4)
1) $[\nabla_{\theta_1}, \theta_2 *] - [\nabla_{\theta_2}, \theta_1 *] = [\theta_1, \theta_2] *$
2) $[\nabla_\theta, t_1 *] + [\theta *, N] = \theta(t_1) - \theta *$.

ここで，$\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}er_S$.

接続 $\nabla$ を導入することにより，flat な座標系という概念を明確にすることができる。その基礎となるのは次の命題である。

**命題 2.** i) $B_2(\theta, \theta') = 0$ $(\theta, \theta' \in \mathfrak{g})$ であれば，$\nabla$ は $\mathcal{D}er_S$ 上の積分可能な接続である。即ち

(2.5) $$[\nabla_\theta, \nabla_{\theta'}] = \nabla_{[\theta, \theta']} \quad (\theta, \theta' \in \mathcal{D}er_S).$$

ii) さらに，$A_2(\theta) = 0$ $(\theta \in \mathfrak{g})$ であれば，

(2.6) $$[\nabla_\theta, N] = 0 \qquad (\theta \in \mathcal{D}er_S)$$

が成り立つ。

$\nabla$ が積分可能であれば，$\mathcal{D}er_S$ の $\nabla$ に関する horizontal subspace $V = \{\theta \in \mathcal{D}er_S ; \nabla_{\theta'}(\theta) = 0 \ (\theta' \in \mathcal{D}er_S)\}$ は，$\mathfrak{g}$ に含まれる $m$ 次元 $\mathbb{C}$-線型空間になる。$\nabla$ は torsion free なので，

$[V, V]=0$ となり、$\mathcal{O}_S$ の座標系 $y=(y_1,\dots,y_m)$ で $V=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{C}D_{y_i}$ を満たすものが，$\mathbb{C}$上の線型変換を除いて一意に決まる。この様な座標系を，flatな座標系という。（K. Saito [3],[4] を参照。）

次に，$\mathcal{O}_S$-準同型写像 $w\in End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ を，

$$(2.7)\qquad w(\theta)=t_1\theta-t_1*\theta\qquad(\theta\in\mathcal{D}er_S)$$

で導入する。$\Delta:=\det(w)$ は，discriminant $D$ の定義方程式を与える。ベクトル場 $\theta\in\mathcal{D}er_S$ は，$\theta(\Delta)\in\mathcal{O}_S\Delta$ となるときに，$D$ に沿って対数的であるといい，その全体を $\mathcal{D}er_S(\log D)$ と記す。このとき，$w$ が，$\mathcal{D}er_S$ から $\mathcal{D}er_S(\log D)$ の上への $\mathcal{O}_S$-同型を与えることを見よう。

そのために，$End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ 上の接続 $\nabla$ を

$$(2.8)\qquad \nabla_\theta(v)=[\nabla_\theta, v]\qquad(\theta\in\mathcal{D}er_S,\ v\in End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S))$$

で定めておくことにする。

命題3. $End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ における関係式として

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &1)\quad [w, \theta*]=0\\ &2)\quad \nabla_\theta(w)=[\theta*, N]+\theta*\\ &3)\quad \nabla_{w(\theta)}(w)=w\circ\nabla_\theta(w)+[w, N\circ\theta*]\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\theta\in\mathcal{D}er_S$ である。

以上の定式化の下に，次の定理を示すことができる。

<u>定理</u>4. $w$ と $\Delta$ について

(2.10) $\quad w(\theta)(\Delta) = \theta(\mathrm{tr}(w))\Delta \qquad (\theta \in \mathcal{D}er_S)$

とくに，$w$は，$\mathcal{D}er_S$から$\mathcal{D}er_S(\log D)$の上への同型写像である。

<u>付記</u> $f$が重みつき斉次多項式のときには，$H_F^{(0)}$が$\mathcal{O}_S$上階数$m$の自由加群となることが知られる。そのときには，写像 $\theta \in \mathcal{D}er_S \longmapsto \theta D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(0)}$ が$\mathcal{O}_S$-同型になるので，$w(\theta)D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(-1)}$ $(\theta \in \mathcal{D}er_S)$ から，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}er_S(\log D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}er_S \arrow[d, "\wr"] \\
H_F^{(-1)} \arrow[r] & H_F^{(0)}
\end{tikzcd}$$

が可換になり，写像 $\theta \in \mathcal{D}er_S(\log D) \longmapsto \theta D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(-1)}$ も $\mathcal{O}_S$-同型になる。このことは，Gauss-Manin 系 $H_F$ と，discriminant の巾 $\Delta^s$ の満す方程式系の構造上の類似を示唆している。

<u>付記</u>2. □2 で展開した議論は，$\lambda = (0, dt_1) \in {}'T^*S$ の近傍で定義され，シンボルが $g$ と $\mathcal{O}_T$-同型であるような一般の simple holonomic system に対して有効である。

## 第2節．分数巾の構造とDuality

この節では，A型Gauss-Manin系のflat coordinate systemとflat basisの背後にある分数巾の構造を，"F-系列""F-系列"という概念で抽象し，系統的に論ずる。論理的には他の節とは独立である。

□0．環 $k((x^{-1}))$ と residue．単位元1をもつ可換環 $k$ に不定元 $x$ を添加して巾級数環 $R = k((x^{-1})) =: k[[x^{-1}]][x]$ を考える．$R$ は，巾級数

(0.1) $\qquad \varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i x^{m-i} \qquad (\varphi_i \in k,\ m \in \mathbb{Z})$

の全体で，表示(0.1)で $\varphi_0 \neq 0$ のとき $m$ を $\varphi$ の次数といい $m = \deg(\varphi)$ とかく。また，$\varphi_0 = 1$ のとき $\varphi$ は monic であるという。次数によるフィルターづけ

(0.2) $\qquad (R(m))_{m \in \mathbb{Z}} \qquad R(m) = k[[x^{-1}]]x^m$

によって，$R$ は分離かつ完備な位相環である。従って，$\varphi$ が monic のとき，$p, q \in \mathbb{Z}$ ($q > 0$, $q \mid \deg(\varphi)$) について，$\psi^q = \varphi^p$ となる monic な $\psi \in R$ が一通りに決まる。$\psi = \varphi^{\frac{p}{q}}$ と表そう。微分型式の $R$-加群 $\Omega^1_{R/k}$ $(= R\,dx)$ 上の residue symbol $\mathrm{Res}_{R/k}$ がつぎの性質で一意に決まる。(表示(0.1)でいえば，$\mathrm{Res}_{R/k}(\varphi\,dx)$ は，$x^{-1}$ の係数 $\varphi_{m+1}$ に他ならない。)

(0.3)　R0)　$\mathrm{Res}_{R/k}: \Omega^1_{R/k} \to k$ は $k$-準同型

R1)　$\mathrm{Res}_{R/k}(d\varphi) = 0$　$(\varphi \in R)$

R2)　$\mathrm{Res}_{R/k}(\varphi^{-1} d\varphi) = \deg(\varphi)$　$(\varphi \in R^* =$ $R$の可逆元全体$)$

この residue については、次の Cauchy 積分表示が成立する。$\xi$を不定元として、

(0.4)　$\varphi(x)_+ = \mathrm{Res}_{R((\xi^{-1}))/R}\left(\dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi - x}\right)$　$(\varphi \in R)$

ここに、$\varphi(x)_+$ は、展開(0.1)の $x$ に関する多項式部分 $\sum_{i=0}^{m} \varphi_i x^{m-i}$ である。

□1. Σ-系列と Duality. $e \in A =: k[x]$ を $n$ 次の monic な多項式とする。$a, b \in A$ について

(1.1)　$\langle a, b \rangle =: \mathrm{Res}_{R/k}\left(\dfrac{ab\,dx}{e}\right) \in k$

とおくと、$\langle\ \rangle$ は $B =: A/Ae$ 上の perfect pairing $\langle\ \rangle : B \times B \to k$ を誘導する。この双対性に注目し、$B$が自己双対的な $k$-基底を構成することを考える。$k$-加群としての同型 $A(n-1) = A \cap R(n-1) \cong B$ で、$A(n-1)$と$B$とを同一視し、$e_i \in A(n-1)$, $\deg(e_i) = i$ $(i = 0, \cdots, n-1)$が、$B$の$k$-基底をなすものとする。$e_i^* \in A(n-1)$ $(i = 0, \cdots, n-1)$が $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ を満すことと、次の等式

(1.2)　$\dfrac{e(\xi) - e(x)}{\xi - x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x)\, e_i^*(\xi)$

とは同値である。このとき、$e_i$は$i$次で主係数は可逆、$e_i^*$は$(n-1-i)$次で主係数は可逆となる。しかも、$a \in A$ の $e$

による割算

(1.3) $a = q(a)e + r(a) \qquad q(a)\in A,\ r(a)\in A(n-1)$

は、$(e_i)$ と双対 $(e_i^*)$、residue symbol を用いて

(1.4) $$\begin{cases} q(a)(x) = (ae^{-1})_+(x) = \mathrm{Res}_{k((\xi^{-1}))/k}\left(\dfrac{a(\xi)\,d\xi}{e(\xi)(\xi-x)}\right) \\ r(a) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\langle a, e_i^*\rangle e_i = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Res}_{B/k}\left(\dfrac{a e_i^* dx}{e}\right) e_i \end{cases}$$

と表わせる。Bの $k$-基底 $(e_i)$ は、$e_i^* = e_{n-1-i}$ となるときに自己双対的ということにすれば、これは (1.2) により、

(1.5) $$\frac{e(\xi)-e(x)}{\xi-x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x)\,e_{n-1-i}(\xi)$$

が成立することと同等である。自己双対的な基底の概念を、無限系列に延長して次の定義を設ける。

<u>定義</u> 1. $A=k[x]$ の元の系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ が、次の2条件を満すとき、$(e_i)_{i=0}^{\infty}$ は <u>E-系列</u>をなすという。

E0) $e_i$ は、$i$ 次 monic

E1) $0\le i, j<k$ について $\mathrm{Res}_{B/k}\left(\dfrac{e_i e_j}{e_k}\right)=\delta_{i,k-1-j}$

(条件 E1) は、$A/Ae_k$ で、$e_0, \dots, e_{k-1}$ が自己双対的ということに他ならない。)

E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ ($e_i$: $i$ 次 monic の多項式) について、母函数

(1.6) $$E(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} e_i(x)\lambda^i \in A[[\lambda]]$$

を用いると、条件 E1) は (1.5) により

(1.7) $$\frac{E(\xi,\lambda)-E(x,\lambda)}{\xi-x} = \lambda E(\xi,\lambda)E(x,\lambda)$$

と書けて，(1.7)が成り立てば，$\xi = x$ として，$\partial_x \xi(x,\lambda) = \lambda \xi(x,\lambda)^2$ を得る。そこで $z(x,\lambda) = \xi(x,\lambda)^{-1} \in A[[\lambda]]$ とおくと，$\partial_x z(x,\lambda) = -\lambda$ ゆえ，$z(x,\lambda) = z(\lambda) - x\lambda$，ただし $z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i \lambda^i$ ($z_i \in k$) と表わせる。逆も言えて，

**命題1.** $A$ の monic な多項式の系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ ($\deg e_i = i$) が $\xi$-系列をなす必要十分条件は，$k$ の元の系列 $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ があり，

$$e_i(x) = (z(\lambda) - x\lambda)^{-1} \text{ の } \lambda^i \text{ の係数}$$

と表わせることである。

$\xi$-系列は，このように $(z_i)_{i=0}^{\infty}$ でパラメータづけられる。この $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ が "flat coordinate system" と呼ぶべきものであるが，次節以降で再定式化する。

## □2. F-系列と分数巾の構造

以下，$k$ は可換な $\mathbb{Q}$-代数。

**定義2.** $A = k[x]$ の元の列 $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ が，

F0) $F_i$ は，$i$ 次 monic

F1) $i \le j$ について，$\frac{1}{i}\partial_x(F_i)F_j - \frac{1}{j}\partial_x(F_j)F_i$ は，高々 $(j-2)$ 次

という2条件を満たすとき，F-系列をなすという。

ここで条件F1)は，$i \le j$ について，

(2.1) $$\frac{1}{i}F_i^{-1}\partial_x(F_i) \equiv \frac{1}{j}F_j^{-1}\partial_x(F_j) \mod R(-i-2)$$

とかけるから，$F_i^{1/i} \equiv F_j^{1/j} \mod R(-i)$ と書けば

(2.2) $\qquad \zeta = \lim_{i \to \infty} F_i^{1/i} \quad ; \quad \zeta \equiv F_i^{1/i} \ \mathrm{mod.}\ R(-i)$

なる極限として、1次のmonicな級数 $\zeta = x + \zeta_1 + \zeta_2 x^{-1} + \cdots$ が定まる。

**命題2.** F-系列 $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ と、1次monicな級数 $\zeta$ とは

$$F_i(x) = \zeta(x)^i_+$$

によって、1対1に対応する。

この1次monicな元 $\zeta$ を、

(2.3) $\qquad \zeta = x + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i x^{1-i} \quad (\zeta_i \in k)$

と展開すると、上の命題は、F-系列が $k$ の元の系列 $(\zeta_i)_{i=1}^{\infty}$ によってパラメータづけられることを主張している。また、$F_i = (\zeta^i)_+$ から、

**命題3.** F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$、derivation $\theta : k \to k$ について、$i \leq j$ に対し、多項式 $\theta(F_i)\partial_x(F_j) - \theta(F_j)\partial_x(F_i)$ は高々 $(j-2)$ 次。

が従う。また、E-系列との関係は、つぎの通りである。

(2.3)の $\zeta$ について、

(2.4) $\qquad e_i = (\zeta^i \partial_x(\zeta))_+ = \frac{1}{i+1}\partial_x(F_{i+1}) \qquad (i \geq 0)$

とおこう。$0 \leq i, j \leq k$ のとき、$e_i e_j e_k^{-1} \equiv \zeta^{i+j-k}\partial_x(\zeta)$ mod. $R(-2)$ なので、

$$\mathrm{Res}_{R/k}\left(\frac{e_i e_j\, dx}{e_k}\right) = \mathrm{Res}_{R/k}(\zeta^{i+j-k}\, d\zeta) = \delta_{i+j-k,-1}$$

となり、$(e_i)_{i=0}^{\infty}$ はE-系列になる。

**命題** 4. E－系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ と，1次 monic な級数 $f$ とは，(2.4) により1対1に対応する。

こうして，1次 monic な級数 $f$ と，F－系列 $(f_i)_{i=1}^{\infty}$，E－系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ とは，互いに同等な対象であることが判る。

§3. $f(x)$ の反転. 1次 monic な級数

(3.1) $$f(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} f_i x^{1-i} \in k((x^{-1})) \quad (f_i \in k)$$

に対して，巾級数

(3.2) $$g(y) = y - \sum_{i=1}^{\infty} z_i y^{1-i} \in k((y^{-1})) \quad (z_i \in k)$$

を，$f$ の逆として定める。

(3.3) $$(g \circ f)(x) = x \qquad (f \circ g)(y) = y$$

すなわち，$g(y)$ は $K$ の生成元として，$y = f(x)$ をとり，$x$ を $y$ の級数として解いたもので，この意味で $K = k((x^{-1})) = k((y^{-1}))$。上の関係で，$(f_i)_{i=1}^{\infty}$ からきまる $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は，$f$ に付随する F-系列，E-系列を調べる上で重要な役割をもつ。各 $z_i \in k$ は，$f_j$ $(1 \leq j \leq i)$ の多項式として定まる。$z_1 = f_1$，$i \geq 2$ では，

$$z_i = -(g(y) \text{ の } y^{1-i} \text{ の係数}) = -\mathrm{Res}_{K/k}(y^{i-2} g(y)\,dy)$$
$$= -\mathrm{Res}_{K/k}(f(x)^{i-2} x\, df(x)) = -\frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{K/k}(x\, df(x)^{i-1})$$
$$= \frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{K/k}(f(x)^{i-1}\,dx)$$

母函数 $S(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \lambda^i \in k[[\lambda]]$ を用いると，$f(x) = x S(x^{-1})$ から，$z_i = \frac{1}{i-1} S(\lambda)^{i-1}_i := \frac{1}{i-1} S(\lambda)^{i-1}$ の $\lambda^i$ の係数。(以後 $\lambda$ の巾級数 $\Phi(\lambda)$ の $\lambda^i$ の係数を $\Phi(\lambda)_i$ と記す。) こうして，

11

**命題5** 上の記号のFに、$s_1 = z_1$、$i \geq 2$に対し、

$$\begin{cases} z_i = \dfrac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(f(x)^{i-1}dx) = \dfrac{1}{i-1}s(\lambda)^{i-1}_i \\ s_i = \dfrac{-1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(g(y)^{i-1}dy) = \dfrac{-1}{i-1}z(\lambda)^{i-1}_i \end{cases}$$

ここで、$s(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i\lambda^i$、$z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i\lambda^i$。

次に、$f$に附随するF-系列$(F_i)_{i=1}^{\infty}$、E-系列$(e_i)_{i=0}^{\infty}$を、$(z_i)_{i=1}^{\infty}$を用いて表わす。不定元$\xi$を添加し、$S = k((\xi^{-1}))$で、

$$\begin{aligned} F_i(x) &= f(x)^i_+ = \mathrm{Res}_{S/k}\left(\frac{f(\xi)^i d\xi}{\xi - x}\right) \\ &= \mathrm{Res}_{S/k}\left(\frac{\eta^i \partial_\eta g(\eta)\, d\eta}{g(\eta) - x}\right) = \left(\frac{\eta\,\partial_\eta g(\eta)}{g(\eta) - x}\right) \text{の}\eta^{-i}\text{の係数} \end{aligned}$$

を、$i \geq 1$で得る。（変数変換$\xi = g(\eta)$を用いた。）$g(\eta) = \eta z(\eta^{-1})$なので、母函数$z(\lambda)$により、

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \left[\frac{-\lambda\partial_\lambda(z(\lambda) - x\lambda)}{z(\lambda) - x\lambda}\right]_i \\ &= -\lambda\partial_\lambda \log(z(\lambda) - x\lambda)_i . \end{aligned}$$

そこで、新たに母函数

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x)\lambda^i \in k[x][[\lambda]]$$

を導入すると、つぎの定理を得る。

**定理1.** 1次monicな$f \in k((x^{-1}))$について、$(z_i)_{i=1}^{\infty}$を上記の通りに定める。$f$の付随するF-系列$(F_i)_{i=1}^{\infty}$、E-系列$(e_i)_{i=0}^{\infty}$は、母函数の間の関係式として、

i) $F(x, \lambda) = -\lambda\partial_\lambda \log(z(\lambda) - x\lambda)$

ii) $E(x, \lambda) = (z(\lambda) - x\lambda)^{-1}$

と表現される。

$\partial_x(F_i) = i e_{i-1}$ ($i \geq 1$) に注意すれば，ii) は i) から従う。この ii) は，命題1のパラメータづけに別の意味を与えるものである。この項の終わりに，具体計算に有用な，命題5を敷衍する反転公式を与える。

命題6 任意の $i, j \in \mathbb{Z}$ について，

$$\frac{1}{i} s(\lambda)^{i}_{i+j} = \frac{-1}{j} z(\lambda)^{j}_{i+j}.$$

が成り立つ。

□4. flat coordinate system. 前項の $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ を，"座標系"と考え，$k$ として可算変数の多項式環 $\mathbb{Q}[s] = \mathbb{Q}[s_1, s_2, \cdots]$ をとる。(3.1) で $\xi$ を $s$ とり，対応する $z_i \in \mathbb{Q}[s]$ ($i \geq 1$) を考える。$s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ の多項式 $z_i = z_i(s)$ は，

(4.1) $$z_i(0) = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial s_j} = \delta_{ij} \quad (i \leq j)$$

を満たすので，$z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ は，$k = \mathbb{Q}[s]$ の代数的に独立な生成系を与える。この意味で，$z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ を $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ に伴う flat coordinate system という。($k = \mathbb{Q}[s] = \mathbb{Q}[z]$)

このとき，$\xi$ に伴う F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$，E-系列 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ について，

(4.2) $$\partial_{z_i}(F_j) = j e_{i-j} \quad (i, j \geq 1,\ i < 0 \text{ では } e_i = 0)$$

となることが判る。一般に，$k = \mathbb{Q}[s]$ の代数的に独立な，$\mathbb{Q}$-代数の生成系を，座標と呼べば，つぎの定理が成立する

**定理** 2. $s=(s_i)_{i=1}^{\infty}$ に伴う flat coordinate system $z=(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は，(4.1) (4.2) を満す唯一の $k=\mathbb{Q}[s]$ の座標として，特徴づけられる。

A型 Gauss-Manin系の flat coordinate system は，以下の様に，$(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を "reduce" して得られる。$\ell$ を固定し，$t=(t_2,\cdots,t_\ell)$ を変数とする多項式環 $k=\mathbb{Q}[t]=\mathbb{Q}[t_2,\cdots t_\ell]$ で，$\ell$ 次多項式

(4.3) $\quad F=x^\ell+t_2x^{\ell-2}+\cdots+t_\ell\in k[x]$

を考える。$k((x^{-1}))$ で，(4.3) の分数巾

(4.4) $\quad \zeta=F^{1/\ell}=x+s_2x^{-1}+s_3x^{-2}+\cdots$

をとることができて，$\zeta$ に付随する F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$，E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ 及び $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を考えることができる。このとき，

(4.5) $$F_i=(F^{\frac{i}{\ell}})_+$$
$$e_i=\frac{1}{i+1}\partial_x(F^{\frac{i+1}{\ell}})_+=\frac{1}{i+1}\partial_x(F_{i+1})$$

，とくに，$F_\ell=F$，$e_{\ell-1}=\frac{1}{\ell}\partial_x(F)$ である。また，$z_1=0$，

(4.6) $\quad z_i=\frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{k((x^{-1}))/k}(F^{\frac{i-1}{\ell}})\quad(i\geq 2)$

で，$\frac{\partial z_i}{\partial t_j}=\ell\delta_{ij}\ (i\leq j)$ が判る。従って，$(z_2,\cdots,z_\ell)$ を $k=\mathbb{Q}[t]$ の新たな座標としてとることができる。($i>\ell$ について，$z_i$ は $(z_2\cdots,z_\ell)$ の多項式となる。) このとき，定理 2 に対応して，

(4.7) $\quad \partial_{z_i}(F)=\ell e_{\ell-i}\quad(2\leq i\leq\ell)$

が成り立つ。通常，Jacobi行列式が 1 となるように，$y_i = \ell z_i$ $(2 \leq i \leq \ell)$ とおいて，$y = (y_2 \cdots, y_\ell)$ を，$t = (t_2 \cdots t_\ell)$ に伴う $A_{\ell-1}$ 型 flat coordinate system と呼んでいる。(これは，K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] の意味の，$A_{\ell-1}$ 型 "flat generator system" に一致する。) この flat coordinate system $y = (y_2, \cdots y_\ell)$ を用いて，

$$(4.8)\quad \begin{cases} F = -\ell \log\left(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^i - x\lambda\right)_\ell \\ e_i = \partial_{y_{\ell-i}}(F) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^i - x\lambda\right)^{-1}_i \\ \quad (0 \leq i \leq \ell) \end{cases}$$

が，定理 1 から従う。また，(4.7) は，

$$(4.9)\quad \partial_{y_i}(F) = e_{\ell-i} \quad (2 \leq i \leq \ell)$$

になれる。座標 $t = (t_2, \cdots, t_\ell)$ と $y = (y_2 \cdots, y_\ell)$ の間の変換公式は，$S(\lambda) = (1 + \sum_{i=2}^{\ell} t_i \lambda^i)^{1/\ell}$ を，媒介として，命題 6 により，計算される。

$$(4.10)\quad y_i = \frac{\ell}{i-1}\left(1 + \sum_{j=2}^{\ell} t_j \lambda^j\right)^{\frac{i-1}{\ell}}_i \quad (2 \leq i \leq \ell)$$

$$(4.11)\quad \begin{cases} t_i = \frac{-\ell}{i-\ell}\left(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^j\right)^{i-\ell}_i \quad (2 \leq i \leq \ell-1) \\ t_\ell = -\ell \log\left(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^j\right)_\ell \end{cases}$$

となる。

## 第3節. A型Gauss-Manin系の構造

この節では、1節の議論をA型Gauss-Manin系の場合に具体化し、2節で示した公式により、A型Gauss-Manin系の様々の表示式を与える。

### □1. A型Gauss-Manin系のflat basis, flat coordinate system.

$A_{\ell-1}$型孤立特異点をもつ多項式 $x^\ell$ ($\ell \geq 2$) のversalな変形

(1.1) $F(x,t) = x^\ell + t_2 x^{\ell-2} + \cdots + t_\ell \qquad t = (t_2 \cdots t_\ell)$

のGauss-Manin系 $H_F$ を考察する。$t' = (t_2 \cdots t_{\ell-1})$ とおき、座標 $(x, t')$ (または $t$, $t'$) をもつ、アフィン空間を、$X$ ($S$, $T$) で表わす。$F_1(x,t') = F(x,t) - t_\ell$ とおくと普遍開折

(1.2) $\varphi : X \to S$, $\varphi(x,t') = (t', -F_1(x,t'))$

についての、De Rham系 $\mathcal{O}_X$ の積分として定まる $\mathcal{E}_S$-加群が、Gauss-Manin系である。第1節と同様、$T^*S \ni (0, dt_\ell)$ での芽で考えることにする。$\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, t'\}$, $\mathcal{O}_S = \mathbb{C}\{t\}$, といった記法も同様である。$F$ のversalityから、階数 $(\ell-1)$ の3つの $\mathcal{O}_T$-自由加群

$$\mathfrak{g} = \{\Theta \in \mathrm{Der}_S \,;\, [D_{t_\ell}, \Theta] = 0\}$$

(1.3) $\Omega_F = \Omega^1_{X/T} / dF_1 \wedge \mathcal{O}_X \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_X / \partial_x(F) = \mathcal{O}_C$

$H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$

の間の，$\mathcal{O}_T$-同型

$$\begin{tikzcd} & \Omega_F \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[r, "\sim"'] & H_F^{(0)}/H_F^{(-1)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & {[\Theta(F)dx]} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \Theta \arrow[ur] \arrow[r] & {[\Theta D_{t_\ell}^{-1} u]} \end{tikzcd}$$

があり，ここで．$u = \int \delta(F(x,t))dx$ は，simple holonomic system としての $H_F$ の標準的な生成元である。

そして，上の同型は，$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} D_{t_\ell}^{-1}\{\{D_{t_\ell}^{-1}\}\}$ から $H_F^{(0)}$ への．$\mathcal{O}_T\{\{D_{t_\ell}\}\}$-同型 $P \to Pu$ を誘導する．（1節を参照）この同型 $\tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$ を用いて，$\mathfrak{g}$ 上に幾つかの演算が定義されるが，それらを具体化する。鍵となるのは，図式

(1.4)
$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{g} \arrow[dl] \arrow[dr, "\sim"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \partial_x(F) \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & \Omega_F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

である。$\mathfrak{g} \to \mathcal{O}_X$ は，$\Theta \mapsto \Theta(F)$ できまる $\mathcal{O}_T$-準同型で，その像を $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^{\ell-2} \mathcal{O}_T x^i$ とおくと，$\mathcal{O}_T$-直和分解 $\mathcal{O}_X = \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X \partial_x(F)$ を得る。$a \in \mathcal{O}_X$ に対して，

(1.5) $a = r(a) + q(a)\partial_x(F) \qquad r(a) \in \mathcal{L},\ q(a) \in \mathcal{O}_X$

とおくと．割算の一意性から，$\mathcal{O}_T$-準同型 $r : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$，$q : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ が定まる。$\mathcal{O}_T$-同型 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ を用いて，$\mathfrak{g}$ 上の演算を，$\mathcal{L}$ の言葉に翻訳する。

<u>命題</u>1．上の記号の下で，$\theta, \theta' \in \mathfrak{g}$ について，

i) $(t_\ell * \theta)(F) = -r(\theta(F)F_1)$, $N(\theta)(F) = \partial_x g(\theta(F)F_1)$

ii) $(\theta * \theta')(F) = r(\theta(F)\theta'(F))$, $(\nabla_\theta \theta')(F) = \theta\theta'(F) - \partial_x s(\theta(F)\theta(F'))$ iii) $k \geq 2$ で，$A_k(\theta) = 0$, $B_k(\theta, \theta') = 0$。

iii) から，torsion free な接続 $\nabla$ は，積分可能で，$N$ について，$[\nabla_\theta, N] = 0$ となる。また，$D = D_{t_\ell}$ とかくと，$H_F^{(0)}$ で，等式

$$(1.6)\quad \left\{ \begin{aligned} t_\ell \theta D^{-1} u &= (t_\ell * \theta) D^{-1} u + N(\theta) D^{-2} u \\ \theta\theta' D^{-2} u &= (\theta * \theta') D^{-1} u + \nabla_\theta \theta' \end{aligned} \right.$$

が $\theta, \theta' \in \mathfrak{g}$ について成立する。$\nabla$ の積分可能性と torsion freeness から，$S$ の座標系 $y = (y_2, \cdots, y_\ell)$ で flat なものがとれるが，その中で，標準的なものを求めよう。

$\mathcal{O}_T$-同型 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{L}$ を通じて，$\nabla$ を $\mathfrak{L}$ 上の接続，$N$ を $\mathfrak{L}$ の $\mathcal{O}_T$-準同型と考える。$a \in \mathfrak{L}$, $\theta \in \mathfrak{g}$ について，$N(a) = \partial_x g(aF_1)$，$\nabla_\theta a = \theta(a) - \partial_x(g(a\theta(F)))$ とおけばよい。$L = \{ a \in \mathfrak{L} : \nabla_\theta a = 0,\ \theta \in \mathfrak{g} \}$ とおくと，flat な座標系 $y = (y_2, \cdots, y_\ell)$ と，$L$ の $\mathbb{C}$-基底（これを $\mathfrak{L}$ の flat basis とよぶ）$e_0, \cdots, e_{\ell-2}$ とは，$D_{y_i}(F) = e_{\ell-i}$ によって，1対1に対応する。そこで，$\mathfrak{L}$ の flat basis をつぎのように定める。$[\nabla_\theta, N] = 0$ $(\theta \in \mathfrak{g})$ ゆえ，$L$ は $N$-不変．$\mathbb{C}$-準同型 $N : L \to L$ について，

**補題1**. $N: L \to L$ は、$\frac{1}{\ell}, \cdots, \frac{\ell-1}{\ell}$ を固有値とし、
その固有ベクトルからなる $L$ の基底 $e_0 \cdots, e_{\ell-2}$ で

$$N e_i = \frac{i+1}{\ell} e_i \quad e_i|_{t'=0} = x^i \quad (0 \le i \le \ell-2)$$

となるものが唯一つ存在する。

この条件できまる $L$ の基底 $e_0, \cdots e_{\ell-2}$ を標準的な flat basis、$D_{y_i}(F) = e_{\ell-i}$ で対応する flat な座標系を、標準的な flat coordinate system という。

**補題2**. $a \in \mathcal{L}$、及び、$\lambda \in \mathbb{C}$ について、

i) $\nabla_\theta a = 0$ ($\forall \theta \in \mathfrak{g}$) となるのは、$a = \partial_x(b)$, $b \in \mathcal{O}_T[x]$ で、$\partial_x(b)\theta(F) - \theta(b)\partial_x(F) \in \mathcal{L}$ となるものが存在するとき、そのときに限る。

ii) $Na = \lambda a$ となるのは、$a = \partial_x(b)$, $b \in \mathcal{O}_T[x]$ で、$\partial_x(b)F_1 - \lambda b\, \partial_x(F) \in \mathcal{L}$ となるものが存在するとき、そのときに限る。

ここで、前節の議論をふりかえってみると、$s = F^{1/\ell} \in \mathcal{O}_S((x^{-1}))$ に付随して定めた $s$-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ について、$e_0 \cdots e_{\ell-2}$ が、標準的な flat basis を与え、前節の $y_2 \cdots y_\ell$ が標準的な flat coordinate system を与えることが判る。

S上の方程式系 $\mathcal{M}_F$ の構造が versality $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L} \simeq \Omega_F$ により、X上での $\partial_x(F)$ による割算を通じて捉えられるという観点は、$\Omega_F$ の双対性と深く結びついている。$a, b \in \mathcal{O}_X$ として、

(1.7) $\langle a, b\rangle = \ell\, \mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{ab\,dx}{\partial_x(F)}\right) = \frac{\ell}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\gamma(t)}\frac{ab\,dx}{\partial_x(F)} \in \mathcal{O}_T$

とおく。(ここで、$\gamma(t)$ は $\{x\in\mathbb{C} : \partial_x F_1(x, t) = 0\}$ を一周 cycle である。) $\langle\ ,\ \rangle$ は図式 (1.4) により $\Omega_F$ 上の perfect pairing を誘導する。(Serre duality)。

この $\mathcal{O}_T$-双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle : \Omega_F\times\Omega_F\to\mathcal{O}_T$ と、与えられた $\mathcal{L}$ 上の演算 $\nabla$, $N$ との関係は、つぎの通り。($a\in\mathcal{O}_T[x]$ ならば $\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{a\,dx}{\partial_x(F)}\right)$ と、第2節、0 の意味の $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_T((x^{-1}))/\mathcal{O}_T}\left(\frac{a\,dx}{\partial_x(F)}\right)$ と一致する。)

**命題 2.** $a, b\in\mathcal{L}$ について、

i) $\langle\nabla_\theta a, b\rangle + \langle a, \nabla_\theta b\rangle = \theta\langle a, b\rangle \quad (\theta\in\mathfrak{g})$

ii) $\langle Na, b\rangle + \langle a, Nb\rangle = \langle a, b\rangle$

i) から、双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ は $L$ 上で $\mathbb{C}$-値となることが従う。ii) から、標準的な flat basis $e_0, \cdots, e_{\ell-2}$ については、直交関係

(1.8) $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i, \ell-2-j}$

が従い、$e_0\cdots, e_{\ell-2}$ の自己双対性が判るのである。これから、$\mathcal{O}_X$ での $\partial_x(F)$ による割算について、$a\in\mathcal{O}_X$ ならば $r(a)$ が

(1.9) $$r(a) = \sum_{j=0}^{\ell-2}\langle a, e_{\ell-2-j}\rangle e_j = \ell\sum_{j=0}^{\ell-2}\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{a e_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right)e_j$$

で与えられることに注意しておく。

□2. Gauss-Manin系 $H_F$ の $(A,B)$-表示　Gauss-Manin系 $H_F$ の表示式(1.6)を、標準的な flat basis $e_0,\cdots,e_{\ell-2}$ と flat coordinate system $y=(y_2,\cdots,y_\ell)$ を用いて具体化する。$H_F^{(0)}$ の $\mathcal{O}_T[[D^{-1}]]$-基底として、$u_0,\cdots,u_{\ell-2}$ をつぎのようにとる。

(2.1) $$u_i = D_{y_{\ell-i}} D_{y_\ell}^{-1}\int \delta(F)\,dx = \int e_i\,\delta(F)\,dx \quad (0\le i\le \ell-2)$$

$D=D_{y_\ell}=D_{t_\ell}$, $w(\theta)=t_\ell\theta - t_\ell*\theta = y_\ell\theta - y_\ell*\theta$ ゆえ、

(2.2) $$\begin{cases} y_\ell\theta D_{y_\ell}^{-1}u = (y_\ell*\theta)D_{y_\ell}^{-1}u + N(\theta)D_{y_\ell}^{-2}u \\ \theta\theta' D_{y_\ell}^{-2}u = (\theta*\theta')D_{y_\ell}^{-1}u + (\nabla_\theta\theta')D_{y_\ell}^{-2}u \\ (\theta,\theta'\in \mathfrak{g}) \end{cases}$$

を得る。$\mathfrak{g}$ の基底 $D_{y_\ell},\cdots,D_{y_2}$ に対応して、$\mathcal{L}$ の基底 $e_0,\cdots,e_{\ell-2}$ をとり、ベクトル $\vec{e}={}^t(e_0,\cdots,e_{\ell-2})$ について、$y_\ell*$, $N$, $D_{y_k}*$ を行列表示したものを、$A_0$, $A_1$, $B^{(k)}$ とかく。
$y_\ell*\vec e = A_0\vec e$, $N\vec e = A_1\vec e$, $D_{y_k}*\vec e = B^{(k)}\vec e$, $\vec e$ の直交性で

(2.3) $$\begin{cases} A_1 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\ell},\frac{2}{\ell},\cdots,\frac{\ell-1}{\ell}\right) \\ A_0=(A_{0,ij})_{0\le i,j\le\ell-2} \quad A_{0,ij} = -\ell\,\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{(F\cdot y_\ell)e_ie_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right) \\ B^{(k)}=(B^{(k)}_{ij})_{0\le i,j\le \ell-2} \quad B^{(k)}_{ij} = \ell\,\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{e_{\ell-k}e_ie_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right) \end{cases}$$

が判る。

**定理1.** Gauss-Manin系 $H_F$ は、flat coordinate system $y=(y_2,\cdots,y_\ell)$ による(2.1)のベクトル $\vec u={}^t(u_0,\cdots,u_{\ell-2})$ の方程式系として、(2.3)の $A_0$, $B^{(k)}$ を

$\in M(\ell-1, \mathcal{O}_T)$, $A_1 \in M(\ell-1, \mathbb{C})$ を用いて,

$$\begin{cases} y_\ell \vec{u} = A_0 \vec{u} + A_1 D_{y_\ell}^{-1} \vec{u} \\ D_{y_k} D_{y_\ell}^{-1} \vec{u} = B^{(k)} \vec{u} \quad (2 \le k \le \ell-1) \end{cases}$$

と表示される。

標準化された flat coordinate system を用いた結果, $B^{(k)}$ が函数行列, $A_1$ が対角化された定数行列になり, また $\Omega_F$ の duality の反映として, 行列 $A_0$, $B^{(k)}$ が反対角線について対称となる。また, 定理1の方程式系の compatibility から, つぎの命題を得る。

<u>命題</u>3. i) $[B^{(k)}, A_0] = 0 \quad (k=2, \cdots, \ell-1)$

ii) $[B^{(k)}, A_1] - B^{(k)} = \partial_{y_k}(A_0) \quad (k=2, \cdots, \ell-1)$

定理1の行列の具体計算を遂行するには, 本質的には, residue

(2.4) $$\ell \operatorname{Res}\left(\frac{F e_i e_j \, dx}{\partial_x(F)}\right) \quad (0 \le i, j \le \ell-2)$$

を求めればよい。巾級数環 $\mathcal{O}_S((x^{-1}))$ で分数巾 $f = F^{1/\ell}$ をとり, $f$ に付随する E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ をとる。$\ell \operatorname{Res}\left(\frac{F e_i e_j \, dx}{\partial_x(F)}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{f e_i e_j \, dx}{\partial_x(f)}\right)$ に注意して, 次の母函数を考える。$E(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \lambda^i$ とおくとき,

(2.5) $$\operatorname{Res}(E(\lambda)E(\mu) f \partial_x(f)^{-1} dx) = \sum_{i,j \ge 0} \operatorname{Res}(e_i e_j f \partial_x(f)^{-1} dx) \lambda^i \mu^j$$

2節の結果から, $(z_i)_{i=2}^{\infty}$ を用いて, $E(\lambda)^{-1} = x(\lambda) - x\lambda$,

$z(\lambda) = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} z_i \lambda^i$ と表わせば,

**命題4** $$\mathrm{Res}\left(\frac{E(\lambda)E(\mu)\xi\,dx}{\partial_x(\xi)}\right) = \frac{\partial_\lambda z(\lambda) - \partial_\mu z(\mu)}{\mu z(\lambda) - \lambda z(\mu)}$$

が成り立つ。この表示は,

(2.6) $$\lambda\mu\,\mathrm{Res}\left(\frac{E(\lambda)E(\mu)\xi\,dx}{\partial_x(\xi)}\right) = (\lambda\partial_\lambda + \mu\partial_\mu)\log\left(1+\sum_{i=2}^{\infty} z_i(\lambda^{i-1}\mu + \cdots + \lambda\mu^{i-1})\right)$$

とも書かれる。

この母函数を用いて(2.4)を計算すると, (2.6)の右辺で $\lambda^i\mu^j$ の係数を $\Lambda(i,j)$ と書けば, $0\le i, j\le \ell-2$ のとき,

(2.7) $$\ell\,\mathrm{Res}\left(\frac{e_i e_j F\,dx}{\partial_x(F)}\right) = \Lambda(i+1, j+1) - \Lambda(i+j+2-\ell, \ell)$$

となる。

## §3. 対数的ベクトル場と discriminant の満す方程式

第1節の議論によれば, $w(\theta) = t_\ell\theta - t_\ell*\theta = y_\ell\theta - y_\ell*\theta$ で定する $\mathcal{O}_S$-準同型 $w: \mathrm{Der}_S \to \mathrm{Der}_S$ は, discriminant $D$ に沿って対数的なベクトル場の全体 $\mathrm{Der}_S(\log D)$ の上への同型を与える。$\mathrm{Der}_S$ の $\mathcal{O}_S$-基底 $D_{y_\ell}, \cdots D_{y_2}$ についての $w$ の行列表示は, (2.3)の行列を用いて, $R =: y_\ell I - A_0$ で与えられる。そこで,

(3.1) $\Theta_k = w(D_{y_k})$ $(2\le k\le \ell)$ ${}^t(\Theta_\ell \cdots \Theta_2) = R\,{}^t(D_{y_\ell} \cdots D_{y_2})$

とおくと, $\Theta_\ell, \cdots \Theta_2$ は, $\mathrm{Der}_S(\log D)$ の $\mathcal{O}_S$-自由基底となる。今の場合, $\Delta = \det(w) = \det(R)$ は, $F = x^\ell + t_2 x^{\ell-2} + \cdots + t_\ell$ の判別式である。表示式(2.2)から, $w$, $*$ の関係

式を用いて、Gauss-Manin系 $H_F$ の、対数的ベクトル場 $\theta_\ell, \cdots, \theta_2$ に関する表示式を得る。

**定理 2.** 上の記号の下で、$H_F$ において、

$$\theta_k \vec{u} = B^{(k)}(A_1 - I)\vec{u} \quad (2 \le k \le \ell)$$

が成立する。

$w : \mathrm{Der}_S \to \mathrm{Der}_S$ を用いると、discriminant $\Delta$ について、

(3.3) $$w(\theta)\Delta = \theta(\mathrm{tr}(w))\Delta. \quad (\theta \in \mathrm{Der}_S)$$

が成り立つことは、すでに述べた。$\mathrm{tr}(w) = \mathrm{tr}(R)$ に注目する。flat basis に関して、$\partial_x F(\lambda) = \lambda F(\lambda)^2$、つまり

(3.4) $$\sum_{i=0}^{\ell-2} e_i e_{\ell-2-i} = \frac{1}{\ell}\partial_x^2(F)$$

ゆえ、命題4から、

**命題 5** $$\mathrm{tr}(w) = \mathrm{Res}\left(\frac{F\partial_x^2(F)\,dx}{\partial_x(F)}\right) = \ell \log\left(1 + \sum_{i=2}^{\ell} \frac{i-1}{\ell} y_i \lambda^i\right)_\ell$$

$\tau = \mathrm{tr}(w) = \mathrm{tr}(R)$ とかく。

**定理 3.** $\mathrm{Der}_S(\log D)$ の $\mathcal{O}_S$-基底 $\theta_\ell, \cdots, \theta_2$ $(\theta_k = w(\partial_{y_k}))$ について、

$$\theta_k(\Delta) = \partial_{y_k}(\tau)\Delta \quad (2 \le k \le \ell)$$

$$\partial_{y_k}(\tau) = (k-1)\left(1 + \sum_{i=2}^{\ell} \frac{i-1}{\ell} y_i \lambda^i\right)^{-1}_{\ell-k} \quad (2 \le k \le \ell)$$

が成立する。

# 文献

[1] Ishiura, S. and Noumi, M. : A calculus of the Gauss-Manin system of type $A_\ell$. I, II. Proc. Japan Acad. Vol. 58, No.1, 13-16, No.2, 62-65, (1982).

[2] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, (1979).

[3] Saito, K. : Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point. (RIMS. preprint).

[4] Saito, K. : On a linear structure of a quotient variety by a finite reflexion group. (RIMS. preprint)

[5] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. in Algebra, 8, 373 - 408 (1980).